c@mpus
Economie et Gestion
Module de Mathématiques

Leçon 1 : Autour de la notion de fonction

Objectif : La connaissance du vocabulaire introduit et l'utilisation de ce vocabulaire : Fonction, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, variable, argument, ensemble de définition, ensemble image, graphe, représentation graphique, application, injection, surjection, bijection, fonction réciproque et composition de fonctions.

Sens de la leçon : Cette leçon met en place un vocabulaire et des notions mathématiques, outil nécessaire à la bonne compréhension de l'analyse et de l'algèbre présents dans les chapitres suivants.

Avertissement : Dans le langage courant le mot fonction est synonyme de correspondance et de mise en relation (la réussite d'un étudiant est fonction de son travail).
En mathématique le mot fonction est plus restrictif, c'est un cas particulier de relation (ou de correspondance)

1. Notion de fonction - Définitions

1.1. Correspondance (ou relation)

On considère deux ensembles d'éléments quelconques **E** et **F**.
On établit une **correspondance f** de l'ensemble **E** vers l'ensemble **F**, en associant à des éléments de **E**, des éléments de **F**.

f est appelée aussi **relation** de **E** vers **F**.

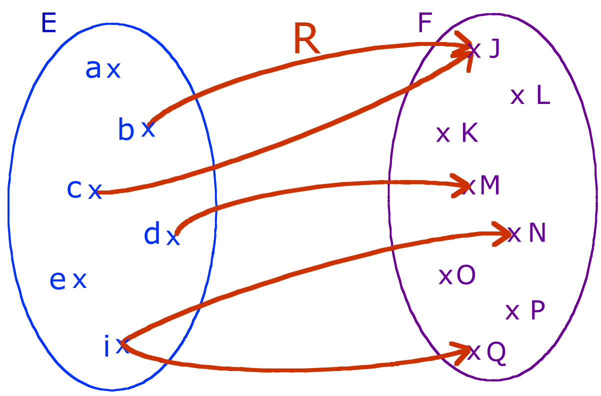
1.1.1. vocabulaire

E est appelé **ensemble de départ**.

Ensemble E = {a, b, c, d, e, i}

F est appelé **ensemble d'arrivée**.

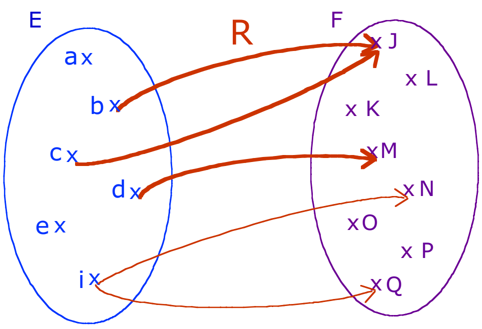
Ensemble F = {J, K, L, M, N, O, P, Q}



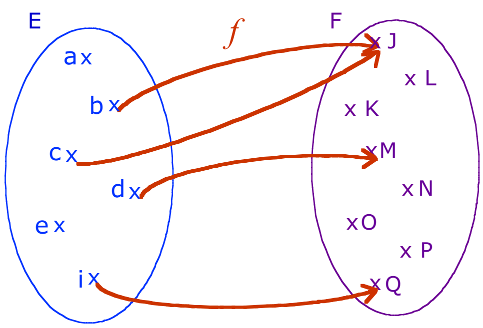
1.2. Fonction

Définition : Une correspondance f d'un ensemble de départ **E** vers un ensemble d'arrivée **F** est une fonction si elle associe à tout élément de **E**, au plus un élément de **F**.

Définition : Une relation f d'un ensemble de départ **E** vers un ensemble d'arrivée **F** est une **fonction** si elle associe à tout élément de **E**, au plus un élément de **F**.
Quel est le groupe de mots important dans cette définition? Cliquez dessus pour qu'il apparaisse en caractères gras



R n'est pas une fonction



f est une fonction de E vers F

1.2.1. Notation et vocabulaire

On note f : **E** → **F**

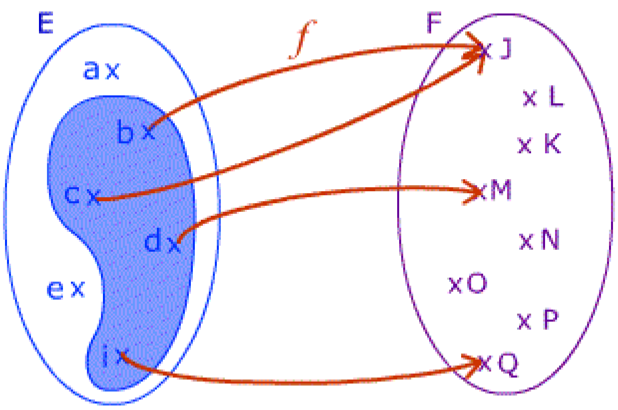
x → y = f(x)

où x désigne un élément de **E** et y = f(x), l'élément de **F** que f lui fait correspondre.
x est appelé **variable** ou **argument** de la fonction f.
f(x) est l'**image** ou le **transformé** de x par f, x est l'**antécédent** de y=f(x).

Attention : Ne pas confondre la fonction f (qui est une correspondance ou une relation) avec f(x) qui est un élément de l'ensemble d'arrivée F.

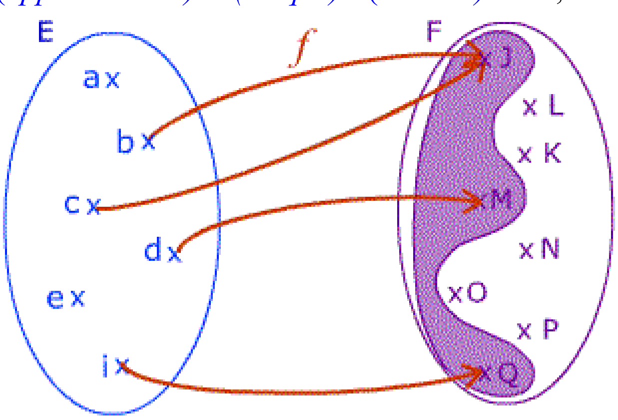
1.3. Ensemble de définition et ensemble image.

1.3.1. L'ensemble de définition d'une fonction f de **E** vers **F** est l'ensemble des éléments de **E** ayant une image dans **F**. On note souvent cet ensemble, D_f (*ensemble de définition de f).*



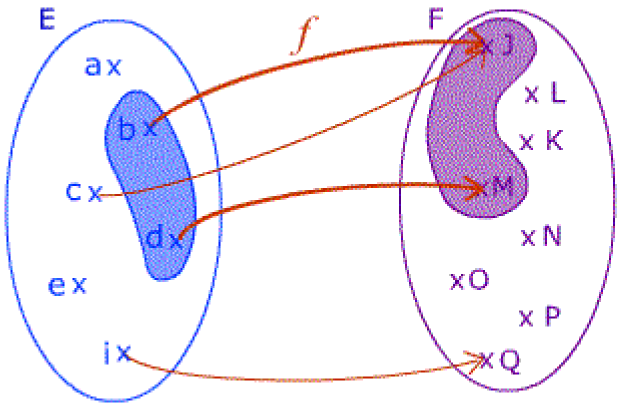
1.3.2. L'ensemble image de **E** par f, est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **E**. On le note Im(f) (*ensemble image de f)* ou f(**E**) (*ensemble image de f)*. On peut écrire :

f(**E**) = { y∈(*appartenant à)***F** /(*tel que)* ∃(*il existe)* x∈**E**, tel que y = f(x) }



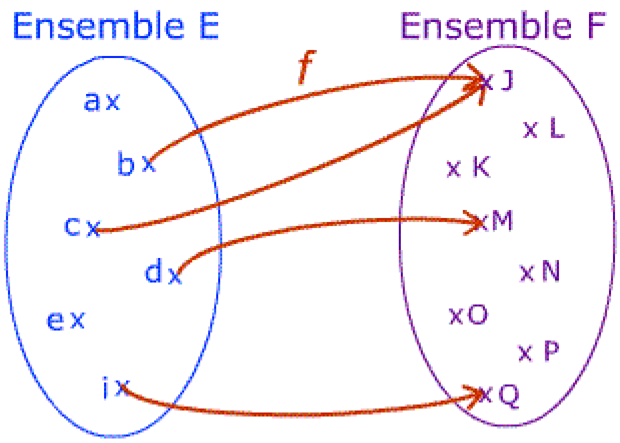
Plus généralement, si **A** est un sous-ensemble de **E**, l'ensemble image de **A** par f est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **A**. On le note f(**A**). On peut écrire :

$$f(\mathbf{A}) = \{ y \in \mathbf{F} \ / \ \exists x \in \mathbf{A}, \text{ tel que } y = f(x) \}$$



1.4. Graphe et représentation graphique d'une fonction

1.4.1. Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des couples (x,f(x)) pour tous les éléments x de **E** ayant une image par f.

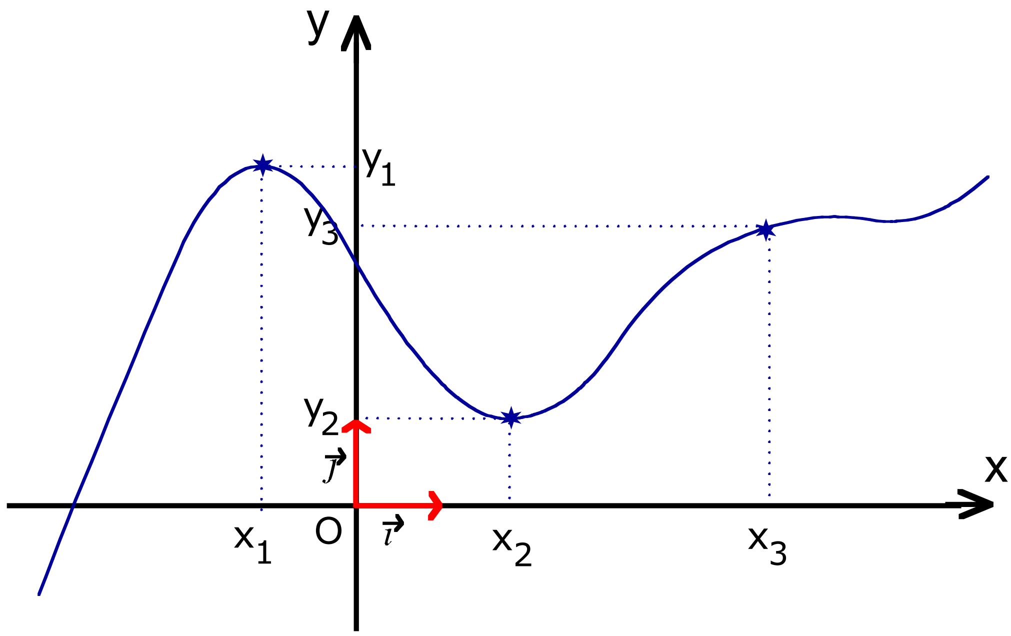


1.4.2. Représentation graphique

1.4.2.1. Cas des fonctions de R(ensemble des réels) dans R

On suppose le plan rapporté à un repère (O*(origine du repère)* , $\vec{i}$ *(vecteur unitaire de l'axe des abscisses (Ox))*, $\vec{j}$ *(vecteur unitaire de l'axe des ordonnées (Oy))*). La représentation graphique d'une fonction f de **R** → **R** est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,f(x)) pour tous les éléments x de **R** ayant une image par f. Cette représentation graphique est une courbe, on la note C(f) *(représentation graphique de f ,ou courbe représentant f)*.

y = f(x) est l’équation de la représentation graphique de f



La représentation graphique permet de visualiser le graphe. A chaque couple (x,f(x)) du graphe correspond le point de coordonnées (x,f(x)) de la représentation graphique.

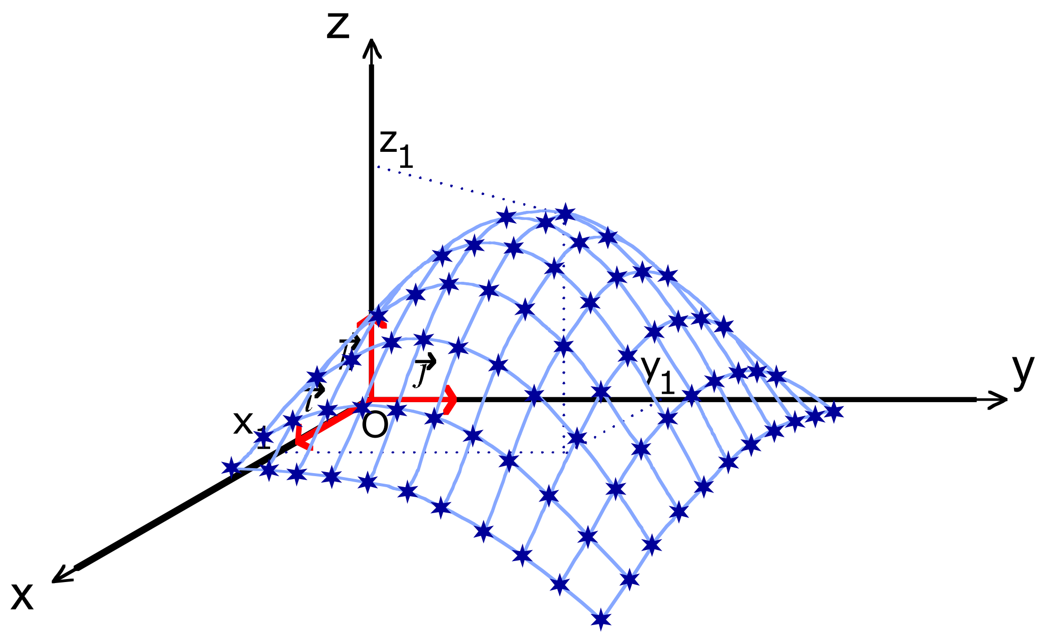
1.4.2.2. Cas des fonctions de $\mathbf{R}^2$ (ensemble des couples de (x,y) de réels) dans R

On considère la fonction f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$(x,y) \to z = f(x,y)$$

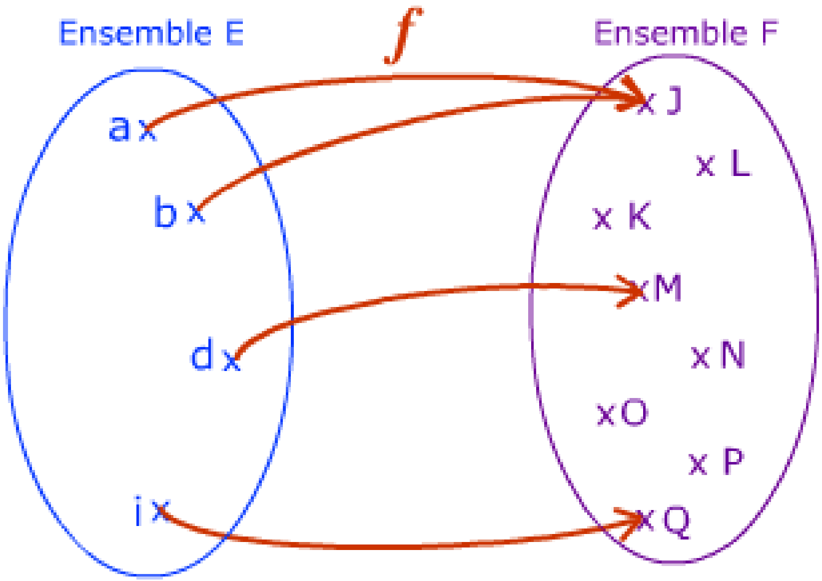
On suppose l'espace rapporté à un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, *$\vec{k}$ (vecteur unitaire sur l'axe des cotes (Oz))*). La représentation graphique de f est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x,y,f(x,y)) pour tous les éléments (x,y) de $\mathbf{R}^2$ ayant une image par f. Cette représentation graphique est une surface, on la note S(f) *(représentation graphique de f, ou surface représentant f)*.

$$\boxed{z = f(x,y) \text{ est l'équation de la surface représentant f}}$$



1.5. Application

Définition : On appelle **application** d'un ensemble **E** dans un ensemble **F**, une fonction telle que <u>tout</u> élément de **E** a une image dans **F**.



Remarque : f est une application de **E** dans **F** si et seulement si Df = **E**.

2. Injection et surjection, bijection et fonction réciproque

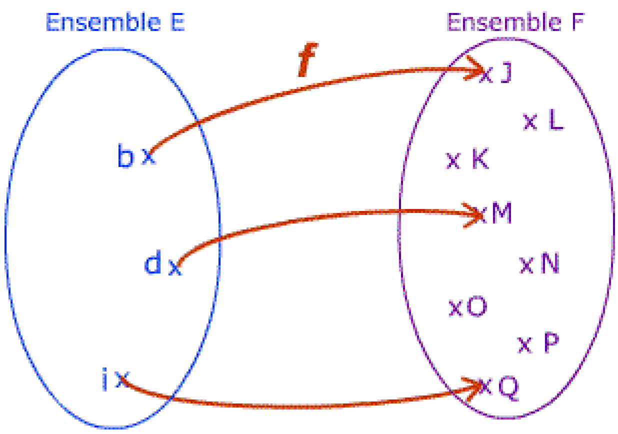
2.1. Injection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **injective** si, dès que deux éléments de **E** sont distincts, leurs images par f sont distinctes. On dit aussi que f est une **injection**.

Cela peut s'écrire : (x≠*(différent de)*x') ⇒*(implique)* (f(x) ≠ f(x'))

Cela peut aussi s'écrire : (f(x) = f(x')) ⇒ (x = x').
On utilise souvent la dernière implication pour démontrer qu'une application est injective.

On peut aussi caractériser une injection de **E** dans **F** par une application dont tout élément de **F** admet au plus un antécédent dans **E**.



2.1.1. Cas des fonctions de R dans R

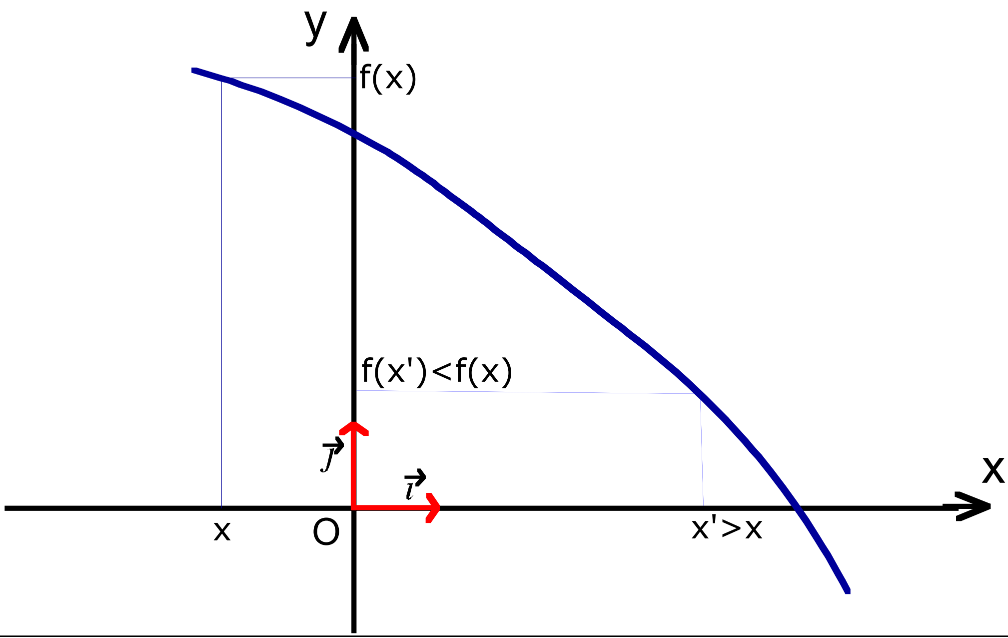
Définitions : Une fonction de **R** dans **R** est strictement croissante sur un sous ensemble **A** de Df si pour **tous** réels x et x' de **A** :

(x > *(strictement supérieur à)* x') ⇒ (f(x) > f(x')).

Une fonction de **R** dans **R** est strictement décroissante sur un sous ensemble **A** de Df si pour **tous** réels x et x' de **A** :

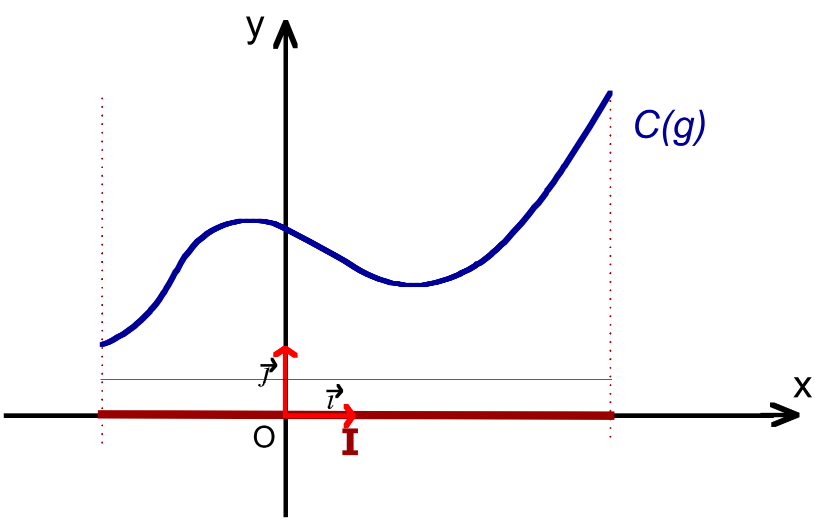
(x > x') ⇒ (f(x) < *(strictement inférieur à)* f(x')).

Une fonction de **R** dans **R** est strictement monotone sur un **A** si elle y est, soit strictement croissante, soit strictement décroissante.



Propriété : Si une fonction de **R** dans **R** est strictement monotone sur un intervalle I de D_f, c'est une injection sur I.

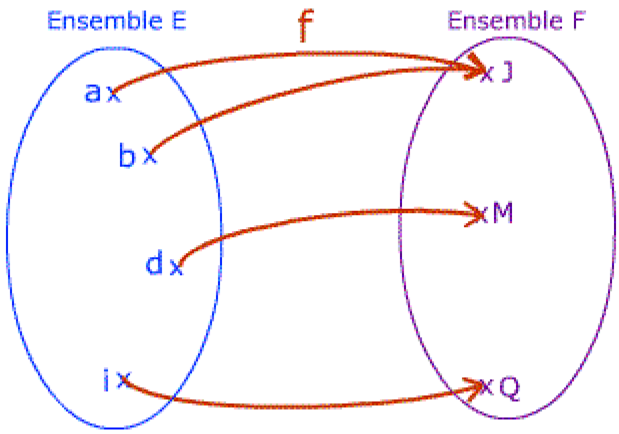
C(g) n'est pas la représentation graphique d'une injection de I dans ℝ (*g* n'est pas monotone sur I)



2.2. Surjection

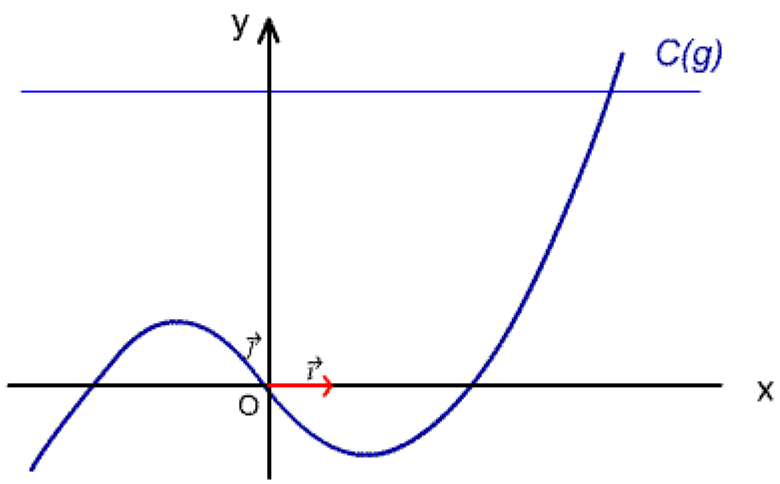
Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **surjective**, si <u>tout</u> élément y de **F** a <u>au moins un</u> antécédent x dans **E**. On dit aussi que f est une **surjection** de **E sur F**.

Cela peut s'écrire : ∀*(pour tout)*y∈**F**, ∃x∈**E** / y = f(x)



Remarque : Pour une application f :(f est surjective) ⇔*(équivaut à)* (Im(f)= f(**E**) = **F**).Autrement dit f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée est atteint par f.

2.2.1. Cas des fonctions de R dans R

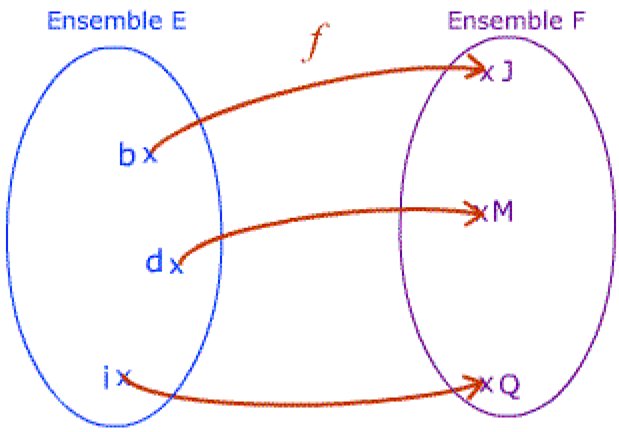


Vous aurez bien compris que injection et surjection sont deux notions indépendantes. L'injection s'analyse sur l'ensemble de départ, alors que la surjection s'analyse sur l'ensemble d'arrivée.

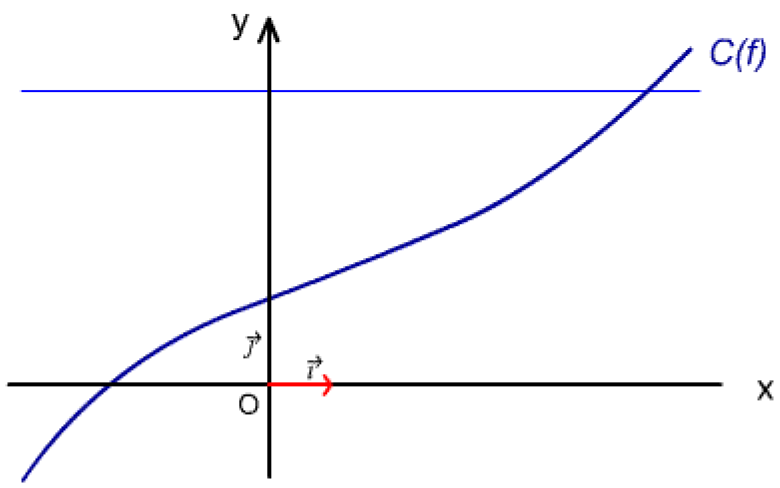
2.3. Bijection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **bijective**, si tout élément y de **F** a un antécédent x unique dans **E**. On dit aussi que f est une **bijection** de **E sur F**.

Cela peut s'écrire : : ∀y∈**F**, ∃!*(il existe un unique)*x∈**E** / y = f(x)

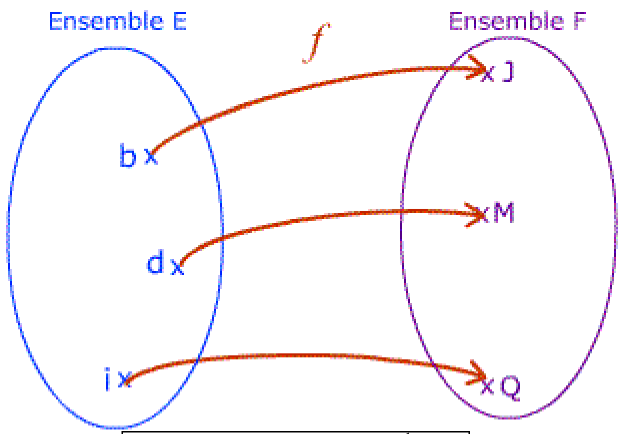


2.3.1. Cas des fonctions de R dans R



2.4 Fonction réciproque

Définition : Si f est une bijection de **E** dans **F**, à tout élément y de **F**, on peut faire correspondre un unique élément x de **E** tel que y = f(x). On définit ainsi une nouvelle application de **F** dans **E**, appelée **fonction réciproque** de f et notée f^{-1} *(fonction réciproque de f)*. f^{-1} est alors une bijection qui, à tout élément y de **F**, associe $x = f^{-1}(y)$ de **E**.



On peut écrire : $\boxed{(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))}$

Attention: Ne pas confondre f^{-1} qui est la fonction réciproque et 1/f qui est l'inverse de la fonction f . Ces deux fonctions se notent parfois de la même façon.

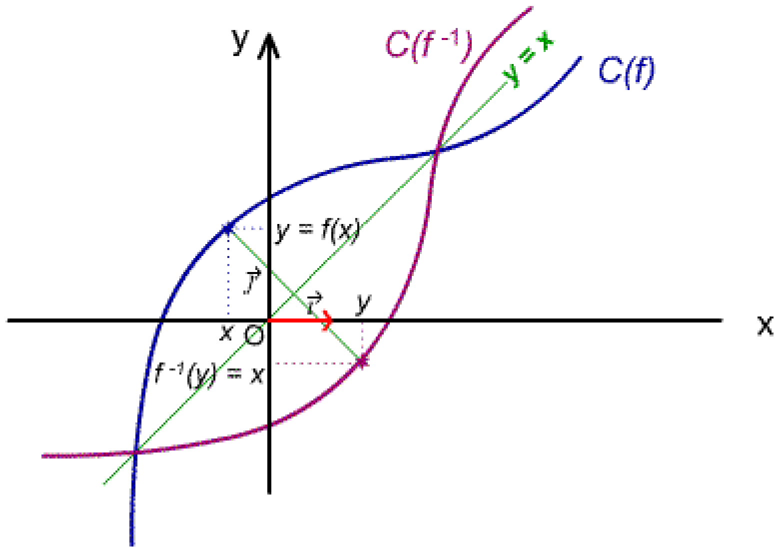
3.1.1. Méthode

Soit f une fonction de **E** vers **F**.
Ainsi pour déterminer la fonction réciproque de f, on est amené à chercher les antécédents des éléments de l'ensemble d'arrivée.
Il faut donc résoudre l'équation y = f(x).
On détermine d'abord les ensembles sur lesquels cette équation a exactement une solution (c'est à dire les ensembles sur lesquels f est une bijection).
Ensuite on exprime x en fonction de y, c'est cette fonction qui est f^{-1} .
On a alors $x = f^{-1}(y)$.

3.1.2. Cas particulier E = F

Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes (**E** = **F**), f est donc une fonction de **E** dans **E**.
x et y désignent des éléments du même ensemble, on a alors plutôt l'habitude d'appeler x la variable et y son image. Le nom de la variable important peu, on ne change pas la fonction en appelant x la variable et y son transformé, on obtient alors $y = f^{-1}(x)$.

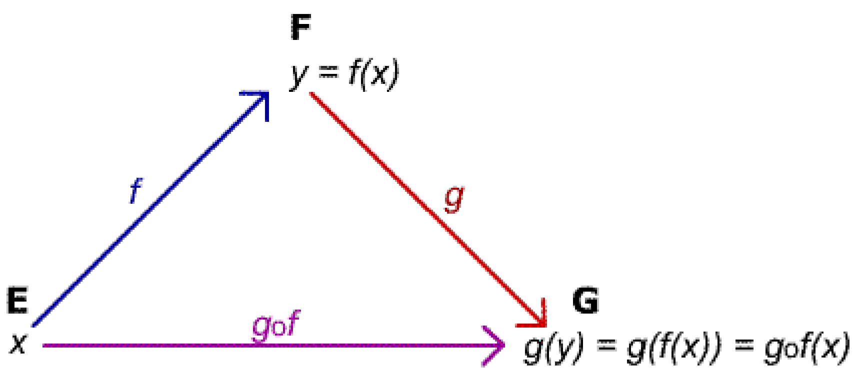
Propriété : En **repère orthonormé** *(les axes sont orthogonaux et les unités sur les axes sont les mêmes)* les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation y = x).



3. Composition des fonctions

3.1. Composition d'applications

Définition : Soit f une application de **E** dans **F**, et g une application de **F** dans **G**, on appelle **application composée** de f et g, l'application qui à tout élément x de **E** fait correspondre l'élément g(f(x)) de **G**.
On note g(f(x)) = g∘*(rond (composition des fonction))*f(x) et on dit « f rond g ».



3.2. Composition de fonctions

On peut aussi définir g∘f si f et g sont des fonctions, mais il faut alors que l'ensemble image de f soit inclus dans l'ensemble de définition de g.
Si g est une application de f(Df) dans **G**, g∘f sera alors une fonction composée, ayant même ensemble de définition que f.

3.3. Non commutativité de la composition des fonctions

Attention la composition des fonctions n'est pas commutative

En général fog ≠ gof.

En effet pour pouvoir définir gof, il faut que l'ensemble de départ **F** de g contienne f(**E**), et pour pouvoir définir fog, il faut que l'ensemble de départ **E** de f contienne g(**F**).
Or ce n'est pas parce que l'ensemble de départ **E** de f contient g(**F**), qu'automatiquement l'ensemble de départ **F** de g contient f(**E**).

Par exemple si g est une application de **R** dans $\mathbf{R}^2$ et si f est une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ *(ensemble des triplets (x,y,z) de3 réels ordonnés x, y et z)*, on peut définir fog mais pas gof.

Et même si on peut définir fog et gof, ces deux fonctions sont en général distinctes.

3.4. Cas particulier de la fonction réciproque

On se propose de composer f et f^{-1}. C'est toujours possible et on obtient toujours le même résultat.

3.5 Composée n fois (uniquement pour les fonctions de E dans E)

On note f^n *(composée de f n fois ou puissance $n^{ième}$ de f)* la fonction fofof….of (f composée n fois).

Attention: Ne pas confondre f^n = fonction fofof….of (f composée n fois) et la puissance $n^{ième}$ de f, f^n = f×f×…×f (n produits).